# Introducción a las probabilidades
## Tarea II
## (10 %)

### Instrucciones

La tarea se puede entregar por equipos de hasta dos personas, sin excepción, y debe ser entregada a más tardar el día del examen, a la hora de clase.

**Reglas de presentación.**

- Imprimir este enunciado y rellenar los espacios apropiados.
- Respetar el orden de los ejercicios
- Responder en los espacios correspondientes; intercalar hojas si es necesario.
- Escribir con letra legible.
- Usar hojas limpias, escritas por un sólo lado.
- No incluir las hojas con preguntas sin respuesta.
- Engrapar bien la tarea en la esquina superior izquierda.

Cada violación de una regla de presentación incurrirá en una penalización de un punto sobre la nota del ejercicio.

Las entregas tardías se recibirán con una penalización acumulada del 20 % de la nota por día hábil de retraso; luego de cuatro días tarde, no vale la pena que entreguen.

### Evaluación

Todas las respuestas deben estar apropiadamente explicadas y desarrolladas.

Se seleccionará, mediante sorteo público, el día del examen, un ejercicio para ser corregido. Serán elegibles todos los ejercicios que no hayan salido en el examen.

Solamente se corregirá ese ejercicio y se le asignará una nota sobre 10 puntos.

La nota de la tarea será la nota del ejercicio, luego de aplicar las penalizaciones pertinentes, multiplicada por la fracción de los ejercicios donde exista un intento razonable de resolverlos.

Nos reservamos el derecho a penalizar severamente los casos donde se presenten inconsistencias entre la solución presentada en la tarea y la solución al ejercicio correspondiente en el examen.

### Declaración

Marque con una $\times$ las cajas correspondientes a los ejercicios entregados:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

*Los abajo firmantes declaramos entender a cabalidad las reglas de presentación de la tarea, la evaluación de la misma y los ejercicios aqui entregados.*

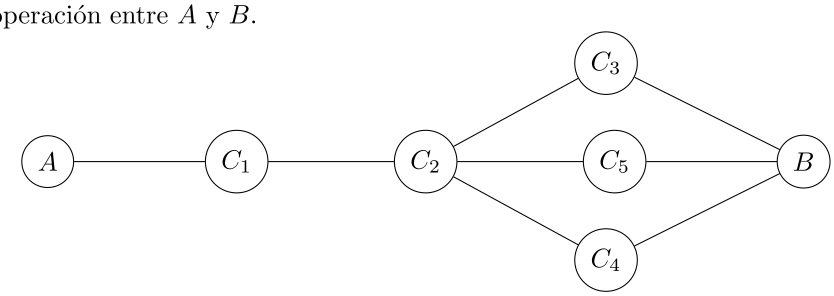
Nombre:
Carné:
Firma:

Nombre:
Carné:
Firma:

## Ejercicios

1. Suponga que $(X, Y)$ está distribuido uniformemente en el triángulo dado por los puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, -4)$.
   *a*) Encuentre $\mathsf{Cov}(X, Y)$, la covarianza entre $X$ y $Y$.
   *b*) Encuentre $\rho(X, Y)$, el coeficiente de correlación entre $X$ y $Y$.
   *c*) ¿Son $X$ y $Y$ independientes ?

2. Si $Y$ denota la vida útil de un componente y $F(y)$ es la función de distribución de $Y$, entonces $\mathbb{P}(Y > y)$ se llama *función de confiabilidad* del componente. Suponga que un sistema formado por cinco componentes con funciones de confiabilidad idénticas, $1-F(y)$, opera como se indica en la figura. El sistema opera correctamente si una cadena ininterrumpida de componentes está en operación entre $A$ y $B$.




Si los cinco componentes funcionan independientemente, encuentre la confiabilidad del sistema en términos de $F(y)$.

3. A través de una encuesta se quiere estimar la fracción $p$ de adultos de la población que están de acuerdo con una nueva política económica. Se interroga a $n$ personas de la población, y se estima $p$ como $\hat{p} = \frac{X}{n}$, siendo $X$ el número de personas encuestadas que manifiestan acuerdo con la política.
   *a*) Si $p = 0{,}2$ utilice la desigualdad de Chebyshev para acotar el tamaño de la muestra si se quiere que $p$ y $\hat{p}$ difieran en menos de 0,01 con probabilidad mayor que 0,9.
   *b*) Si $p = 0{,}2$ utilice el TLC para acotar el tamaño de la muestra si se quiere que $p$ y $\hat{p}$ difieran en menos de 0,01 con probabilidad mayor que 0,9.
   *c*) Resuelva el problema en el caso realista donde $p$ es desconocido.

4. La duración en horas $Y$ de un componente electrónico es una variable aleatoria con una función de densidad dada por la expresión:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{200}\mathbf{e}^{-\frac{1}{200}y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

Cuatro de estos componentes funcionan independientemente en un equipo, que falla si se descomponen al menos dos de sus componentes.

Calcule la probabilidad de que el equipo funcione por lo menos durante 300 horas sin fallar.

5. Suponga que $Y_1$ es el peso en toneladas de un producto que un proveedor almacena al principio de la semana, y también que $Y_1$ tiene una distribución uniforme en el intervalo $0 \leq y_1 \leq 1$. Sea $Y_2$ el peso del producto que el proveedor vende durante la semana, y suponga que $Y_2$ tiene una distribución uniforme en el intervalo $0 \leq y_2 \leq y_1$ donde $y_1$ es el valor específico de $Y_1$ para la semana en consideración.
   *a*) Si el proveedor almacenó $\frac{1}{4}$ de tonelada del producto, ¿qué cantidad puede esperar vender durante la semana?
   *b*) ¿Quién es $\mathsf{E}(Y_2|Y_1)$?
   *c*) Calcule $\mathsf{E}(Y_2)$.

6. Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{Unif}(0,1)$.

   *a*) Calcule $F_{Y_{(n)}}(y)$ la función de distribución de probabilidad acumulada de $Y_{(n)} = \text{máx}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

   *b*) Calcule $F_{Y_{(1)}}(y)$ la función de distribución de probabilidad acumulada de $Y_{(1)} = \text{mín}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

   *c*) Calcule e identifique la función de densidad de $Y_{(n)}$.

   *d*) ¿Son $Y_{(1)}$ y $Y_{(n)}$ independientes?

   *e*) Calcule la media y la varianza de $Y_{(n)}$

7. Sea $X \sim \mathsf{Unif}(-1, 3)$, $Z = X^2$ y considere $Y|X = x \sim \mathsf{Bin}(4 + \lceil x \rceil, (x-1)^2/4$.

*a*) ¿Que tipo de variable aleatoria es $Y$? (discreta, continua, etc.)

*b*) Determine $f_Z(z)$ la densidad de $Z$.

*c*) ¿Quien es $\mathsf{E}(Y|X)$?

*d*) Calcule $\mathsf{E}(Y)$.

*e*) Determine la densidad conjunta de $X$ y $Z$. ¿Son $X$ y $Z$ independientes?

8. Sean $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$, $Y = \lceil X \rceil$ y $Z = Y - X$.
   *a*) Determine $\mathsf{Rango}(Y)$ y $\mathsf{Rango}(Z)$.
   *b*) Determine la distribución de $Y$.
   *c*) Determine $f_Z(z)$.
   *d*) Determine $\mathsf{E}(Z)$
   *e*) Determine $\mathsf{Var}(Z)$

9. Sea$(X, Y)$ un punto distribuido uniformemente en el cuadrado de vértices $(1, 0)$,$(0, 1)$,$(-1, 0)$ y $(0, -1)$. Considere $U = X + Y$ y $V = X - Y$.
   *a*) Calcule $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0)$.
   *b*) Calcule $\rho(X, Y)$. ¿Son $X$ y $Y$ independientes?
   *c*) Calcule $\rho(U, V)$. ¿Son $U$ y $V$ independientes?
   *d*) Calcule $\mathbb{P}(U > 0|X > 0)$.
   *e*) Calcule $\mathsf{E}(X|U = \frac{1}{2})$

10. La eficiencia (en lúmenes por watt) de unos bombillos de cierto tipo tiene, de acuerdo con las especificaciones del fabricante, una media poblacional de 9,5 y una desviación estándar de 0,5. Una habitación en la que se instalarán 8 de estos focos requiere que la eficiencia promedio sea mayor que 10.

    Calcule la probabilidad de que el requerimiento de la habitación se satisfaga si la eficiencia de los bombillos tiene una distribución normal y bombillos distintos se consideran independientes.